

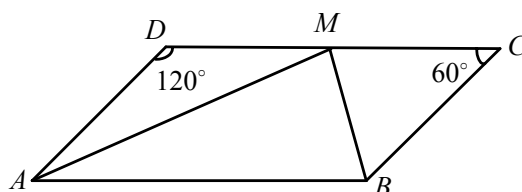
Решения на задачи № 26, 27 и 28

Задача. 26. Нека числата a_1, a_2, a_3 образуват аритметична прогресия и $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ Тогава $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \Leftrightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Leftrightarrow a_1 + d = 4$. Съгласно условието числата $a_1, a_2, a_3 + 2$ или $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d + 2$ образуват геометрична прогресия. От свойството на геометричната прогресия получаваме $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 2d + 2) \Leftrightarrow a_1^2 + 2a_1d + d^2 = a_1^2 + 2a_1d + 2a_1 \Leftrightarrow d^2 = 2a_1$. От системата уравнения $a_1 + d = 4$ и $d^2 = 2a_1$ получаваме $\frac{d^2}{2} + d = 4 \Leftrightarrow d^2 + 2d - 8 = 0$, $d_1 = 2$ и $d_2 = -4$. Тогава за a_1 намираме $a_1 = 2$ и $a_1 = 8$. Получихме две тройки числа, които образуват аритметична прогресия: $a_1 = 2$ и $d = 2$, 2, 4, 6 ; $a_1 = 8$ и $d = -4$, 8, 4, 0.

Задача. 27. Означаваме $AB = a$,

$$AD = b \text{ и } DM = MC = \frac{a}{2}.$$

$$S_{ABCD} = ab \sin 60^\circ = ab \frac{\sqrt{3}}{2}$$



От косинусовата теорема за

$$\triangle BCM \text{ получаваме } BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2 \cdot BC \cdot MC \cdot \cos 60^\circ, \quad 4^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \frac{a}{2} \frac{1}{2},$$

$16 = b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2}$. Аналогично от косинусовата теорема за $\triangle AMD$ получаваме

$$AM^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \frac{a}{2} \cos 120^\circ, \quad 36 = b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2}.$$

$$\begin{cases} 36 = b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} \\ 16 = b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} \end{cases}.$$

Изваждаме почленно от първото уравнение второто и получаваме

$$20 = ab. \text{ За лицето на успоредника получаваме } S_{ABCD} = ab \frac{\sqrt{3}}{2} = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Задача. 28. Вероятността построеният триъгълник да е тъпоъгълен е

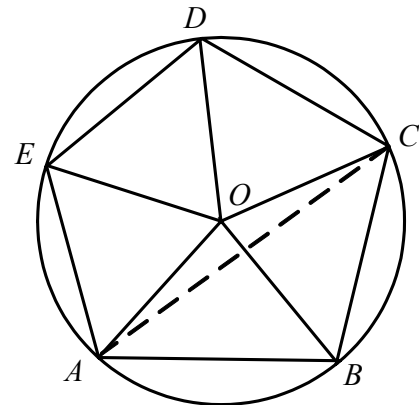
$$P(A) = \frac{\text{брой на тъпоъгълните триъгълници}}{\text{брой на всички триъгълници}}$$

Броят на всички триъгълници, образувани от точките A, B, C, D, E и O , е равен на

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Ъглите при върховете на правилния петъгълник са равни $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 108^\circ$, а централните ъгли също са равни

$$\angle AOC = \angle BOD = \angle COE = \angle DOA = \angle EOB = 144^\circ.$$



ДиAGONALЪТ AC е страна на два тъпоъгълни триъгълници - $\triangle ABC$ и $\triangle AOC$. ДиAGONALИТЕ BD, CE, DA и BE също са страни съответно на по два тъпоъгълни триъгълници. Следователно броят на тъпоъгълните триъгълници е равен на $5 \cdot 2 = 10$.

$$\text{Тогава } P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$