ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

19 май 2011 г. – <u>Вариант 2</u>

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А ~~Б~~ В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А ● ~~В~~ Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Числото $x = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **е от интервала:**

А) $(3;+\infty)$ **Б)** $(-\infty;-3)$ **В)** $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ **Г)** $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$

2. Стойността на израза $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$ **е равна на:**

А) $1-\sqrt{2}$ **Б)** $\sqrt{2}-1$ **В)** $1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ **Г)** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$

3. Ако x_1 **и** x_2 **са корените на квадратното уравнение** $6x^2+x-2=0$**, то** $2x_1$ **и** $2x_2$ **са корени на уравнението:**

А) $12x^2+2x-4=0$ **Б)** $3x^2+x-1=0$ **В)** $3x^2+x-4=0$ **Г)** $6x^2-2x+8=0$

4. Решенията на неравенството $\frac{x^2+x-6}{1-x^2}<0$ **са:**

А) $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(2;+\infty)$ **Б)** $x\in(-3;-1)\cup(1;2)$

В) $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$ **Г)** $x\in(-2;-1)\cup(1;3)$

5. Дефиниционната област на израза $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ **е:**

А) $x\in[0;+\infty)$ **Б)** $x\in(1;+\infty)$ **В)** $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ **Г)** $x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$

6. Броят на реалните корени на уравнението $x^4+x^2=20$ **е:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 4

7. Стойността на израза $\sin\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{cotg}\frac{3\alpha}{2}$ **при** $\alpha=60^\circ$ **:**

А) е $1-\sqrt{3}$ **Б)** е 0 **В)** е $2\sqrt{3}$ **Г)** не съществува

8. Неравенството $\log_a \frac{1}{3} > \log_a \frac{1}{4}$ **е вярно, когато:**

А) $a < 0$ **Б)** $0 < a < 1$ **В)** $a = 1$ **Г)** $a > 1$

9. Общият член на числова редица е $a_n = \sqrt{n^2 - 8n + 16} + 21$, $n \in \mathbb{N}$. **Номерът** n, **за който** a_n **приема най–малка стойност, е:**

А) 1 **Б)** 4 **В)** 17 **Г)** 21

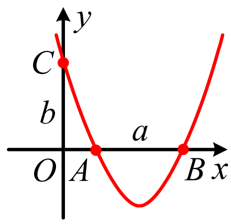
10. Разликата на аритметична прогресия, за която $a_3 = 3$ **и** $3a_2 - a_4 = 4$**, е равна на:**

А) $-\frac{1}{2}$ **Б)** $\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{5}{4}$ **Г)** $\frac{5}{2}$

11. В правоъгълна координатна система xOy **е построена графиката на функцията** $y = x^2 - \frac{11}{3}x + 2$**. Точките** A **и** B **са пресечните на точки на графиката с абсцисната ос, а точката** C **е пресечната точка на графиката с ординатната ос. Ако** $AB = a$ **и** $OC = b$**, то:**

А) $a < b$ **Б)** $a = b$

В) $a > b$ **Г)** a и b не могат да се сравнят.



12. Кое от твърденията НЕ е вярно за статистическия ред: 1; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 9 **?**

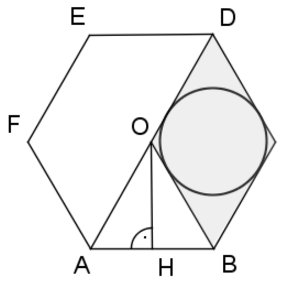
А) Медианата и средноаритметичното на реда са равни.

Б) Ако се добави нов член на реда, равен на 4, **то медианата на получения ред ще бъде** 4,5.

В) Ако се отстрани един член на реда, равен на 4, **то модата на получения ред ще бъде по-малка от медианата.**

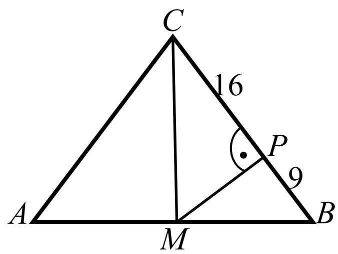
Г) Ако се добави нов член на реда, равен на 4, **то модата на получения ред ще бъде по-малка от медианата.**

13. На чертежа $ABCDEF$ **е правилен шестоъгълник. Ако в него е вписана окръжност с радиус** $OH = 3\sqrt{3}$**, то радиусът на окръжността, вписана в четириъгълника** $OBCD$**, е равен на:**



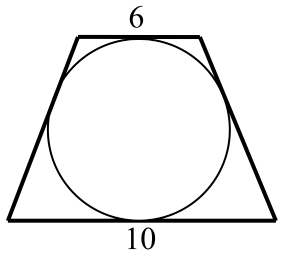
А) $\sqrt{3}$ **Б)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **В)** 3 **Г)** $2\sqrt{3}$

14. В равнобедрения $\triangle ABC$ **на чертежа** CM **(**$M \in AB$**) е медиана към основата и** $MP \perp BC\left(P \in BC\right)$**. Ако** $BP = 9$ **и** $PC = 16$**, то лицето на** $\triangle ABC$ **е равно на:**



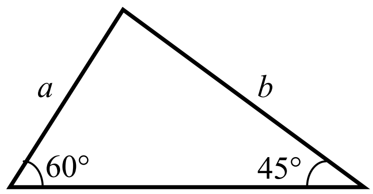
А) 150 **Б)** 300 **В)** 600 **Г)** 3600

15. В равнобедрен трапец с основи 6 **cm и** 10 **cm е вписана окръжност. Радиусът на окръжността е:**



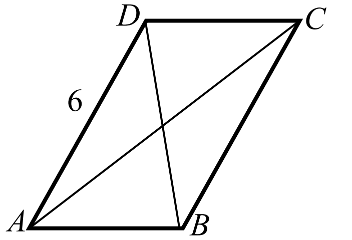
А) $\sqrt{15}$ **cm** **Б)** $\sqrt{17}$ **cm** **В)** $2\sqrt{15}$ **cm** **Г)** $2\sqrt{17}$ **cm**

16. За триъгълника на чертежа отношението $a^2 : b^2$ **е равно на:**



А) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ **Б)** $2 : 3$ **В)** $\sqrt{2} : 3$ **Г)** $2 : \sqrt{3}$

17. За успоредника $ABCD$ **на чертежа** $AD = 6$**,** $AC = 2\sqrt{19}$ **и** $BD = 4$**. Дължината на страната** AB **е равна на:**



А) $\sqrt{10}$ **Б)** $\sqrt{18}$ **В)** $\sqrt{41}$ **Г)** 10

18. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB = 10\sqrt{2}$ и $\angle ACB = 135°$. Разстоянието от центъра на описаната около триъгълника окръжност до страната AB е равно на:

А) $2\sqrt{2}$ **Б)** $3\sqrt{2}$ **В)** $4\sqrt{2}$ **Г)** $5\sqrt{2}$

19. Лицето на ромб $ABCD$ с диагонал $AC = 4\sqrt{3}$ и $\angle ABC = 120°$ е:

А) $2\sqrt{3}$ **Б)** 8 **В)** $6\sqrt{3}$ **Г)** $8\sqrt{3}$

20. Даден е $\triangle ABC$, за който $AC = 5\sqrt{3}$, $BC = 12$ и $S_{\triangle ABC} = 15\sqrt{3}$. Дължина на страната AB може да бъде числото:

А) $\sqrt{199}$ **Б)** $\sqrt{299}$ **В)** $\sqrt{399}$ **Г)** $\sqrt{499}$

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. За $a > 0$ и $b > 0$ намерете стойността на числото $\lg\frac{ab}{10}$, ако $\lg a = 7$ и $\lg b = 3$.

22. Намерете сбора от корените на уравнението $\sqrt{3x^2 + 7x + 5} = 2x + 1$.

23. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm са построени графиките на функциите $f(x) = x^2 + x - 17$ и $g(x) = 2x - 5$, а M е обща точка на двете графики и лежи в първи квадрант. Намерете разстоянието в сантиметри от точка M до началото на координатната система.

24. Фирма се състои от три отдела: административен – 4 души със средна заплата 600 лв, научен – 10 души със средна заплата 550 лв и производствен – 36 души със средна заплата 500 лв. Каква е средната заплата във фирмата?

25. Две от страните на разностранен триъгълник са с дължини 4 cm и 6 cm, а мерките на ъглите срещу тях се отнасят съответно както 1 : 2 . Да се намери третата страна на триъгълника.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. За членовете на аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, ...$ **и геометрична прогресия** $b_1, b_2, b_3, ...$ **са в сила равенствата:** $a_1 = 2b_1 = 2,\ a_6 = 3b_2,\ a_{15} = 4b_3$**. Намерете първите три члена на двете прогресии.**

27. С помощта на цифрите 0, 1, 8 и 9 **са записани всички трицифрени числа с различни цифри и по случаен начин е избрано едно от тях. Каква е вероятността това число да се дели на** 9**?**

28. В $\triangle ABC$ **със страна** $AB = \sqrt{10}$ **точката** O **е центърът на вписаната окръжност,** $AO = 2$ **и** $BO = \sqrt{2}$**. Да се намери лицето на** $\triangle ABC$**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x\Leftrightarrow a^x=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$; при $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=1.2.3\ldots(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)\ldots(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)k}$

Вероятност $\quad P(A)=\dfrac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}$ $\qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $\quad a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $\quad a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1.b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta\mp1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{cotg}2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$